スタディサプリ 共通テスト直前対策講座 数学ⅡBについて

この講座は，大学入学共通テストおよびセンター試験の「過去問題」を通じて，みなさんの実力をチェックし，底上げをするというコンセプトで作りました。この講座を見る頃は，おそらくほぼ全員の人が共通テストの過去問題を解いたことがあるでしょう。では，今一度，次のことを思い返してください。

・いつその過去問題を解きましたか？　まだ実力が伴っていない時期ではないですか？
・どのようなやり方で解きましたか？　今でも同じ解法を取りますか？
・解き直しをしましたか？　それぞれの大問は最後まで解き切りましたか？

１つでも「あ……」と思った人，この講座は，そんなあなたのためにあります。

あなたの「今の」実力が，大学入学共通テストがあなたに要求している資質・能力に対し，どこまで到達していて，どの部分が上回っているのか，または下回っているのか，あなたの予習と動画講義を通じてチェックすることで，あなたの実力が分野毎に整理されます。到達している，または上回っていれば，あとは演習あるのみ，そうでなければ，各分野を見直す最後のチャンスです。

直前期だからこそできる，「あなたの課題」の発見と克服。この講座に，得点アップのカギが隠されています。あなたならではのそのカギを発見してください。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講　　三角関数
第２講　　指数関数・対数関数
第３講　　微分法・積分法
第４講　　数列
第５講　　ベクトル

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから動画講義に臨んでください。講義は予習を行っていることを前提に行われます。

第1講　三角関数

1　k を正の定数として

$$\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x について考える。

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x の個数について考えよう。

①の両辺に $\sin^2 x\cos^2 x$ をかけ，2倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{ア}}}-k\right)\cos 2x=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。したがって，k の値に関係なく，$x=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ のときはつねに①が成り立つ。

また，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0<\sin^2 2x\leqq 1$ であるから，$k>\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のとき，①を満たす x は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ のみである。一方，$0<k<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のとき，①を満たす x の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個であり，$k=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のときは $\boxed{\text{カ}}$ 個である。

（次ページに続く。）

(2)　$k=\dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x について考えよう。

②により $\sin 2x=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であるから

$$\cos 2x=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。したがって

$$\cos x=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

2　関数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 3x$ について考える。

(1)　三角関数の加法定理および合成を用いると

$$f(x)=-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin 3x+\frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos 3x$$

$$=\boxed{\text{オ}}\sin\left(3x+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)$$

と表される。ただし，$0<\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi\leqq 2\pi$ とする。

したがって，$f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$ である。また，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものは $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である。

（次ページに続く。）

(2)　$f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で考えたとき，実数 t に対して $f(x)=t$ となる x の値の個数 N を調べよう。$3x+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ のとり得る値の範囲に注意すると，次のことがわかる。

$|t|>\boxed{\text{ク}}$ のとき，$N=\boxed{\text{サ}}$ である。

$t=\boxed{\text{ク}}$ のとき，$N=\boxed{\text{シ}}$ である。

$t=f(0)$ のとき，$N=\boxed{\text{ス}}$ である。

$|t|<\boxed{\text{ク}}$ かつ $t \neq f(0)$ のとき，$N=\boxed{\text{セ}}$ である。

$t=-\boxed{\text{ク}}$ のとき，$N=\boxed{\text{ソ}}$ である。

3　座標平面上の原点を中心とする半径１の円周上に３点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $Q(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $R(\cos\beta,\ \sin\beta)$ がある。ただし，$0 \leqq \theta < \alpha < \beta < 2\pi$ とする。このとき，s と t を次のように定める。

$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta,\quad t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta$$

(1)　△PQR が正三角形や二等辺三角形のときの s と t の値について考察しよう。

考察１

△PQR が正三角形である場合を考える。

この場合，α，β を θ で表すと

$$\alpha=\theta+\frac{\boxed{\text{ア}}}{3}\pi,\quad \beta=\theta+\frac{\boxed{\text{イ}}}{3}\pi$$

であり，加法定理により

$$\cos\alpha=\boxed{\text{ウ}},\quad \sin\alpha=\boxed{\text{エ}}$$

である。同様に，$\cos\beta$ および $\sin\beta$ を，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表すことができる。

これらのことから，$s=t=\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	① $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$
② $\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$
④ $-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$
⑥ $-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑦ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$

（次ページに続く。）

考察２

△PQR が PQ＝PR となる二等辺三角形である場合を考える。

例えば，点 P が直線 $y=x$ 上にあり，点 Q，R が直線 $y=x$ に関して対称であるときを考える。このとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である。また，α は $\alpha<\dfrac{5}{4}\pi$，β は $\dfrac{5}{4}\pi<\beta$ を満たし，点 Q，R の座標について，$\sin\beta=\cos\alpha$，$\cos\beta=\sin\alpha$ が成り立つ。よって

$$s=t=\frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

である。

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

である。したがって

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{12}\pi,\quad \beta=\frac{\boxed{\text{シス}}}{12}\pi$$

のとき，$s=t=0$ である。

（次ページに続く。）

(2)　次に，s と t の値を定めたときの θ，α，β の関係について考察しよう。

考察３

$s=t=0$ の場合を考える。

この場合，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ により，α と β について考えると

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

同様に，θ と α について考えると

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であるから，θ，α，β の範囲に注意すると

$$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$$

という関係が得られる。

（次ページに続く。）

(3)　これまでの考察を振り返ると，次の⓪〜③のうち，正しいものは［テ］であることがわかる。

［テ］の解答群

⓪　△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

①　△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であるが，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

②　△PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があるが，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

③　△PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があり，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

テキスト解答

【講義問題の略解】

※動画講義の内容を補完するものです。記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません。ご了承ください。

第１講　三角関数

1 (1)　$\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=0$　……①

$\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}=-\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}$ より

$\cos^2 x-\sin^2 x-k\left(\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\right)=0$

$(\cos^2 x-\sin^2 x)\left(1-\dfrac{k}{\cos^2 x\sin^2 x}\right)=0$

$(\cos^2 x-\sin^2 x)(\sin^2 x\cos^2 x-k)=0$

$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$，$\sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$ より

$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k\right)\cos 2x=0$　……②

よって，$\dfrac{\sin^2 2x}{4}=k$ または $\cos 2x=0$ である。

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，つまり $0<2x<\pi$ の範囲において $\cos 2x=0$ を満たすのは $2x=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $x=\dfrac{\pi}{4}$ のときであり，このときつねに②，すなわち①が成り立つ。

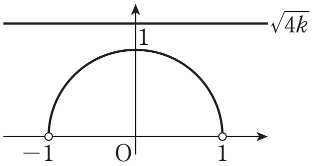
また，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，つまり $0<2x<\pi$ の範囲において，$0<\sin 2x\leqq 1$，すなわち $0<\sin^2 2x\leqq 1$ であるから，$\dfrac{\sin^2 2x}{4}=k$，つまり $\sin^2 2x=4k$ より $\sin 2x=+\sqrt{4k}$ を満たす x の個数は

$4k>1$ つまり $k>\dfrac{1}{4}$ のとき　0 個

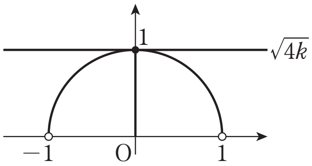
$4k=1$ つまり $k=\dfrac{1}{4}$ のとき　$\sin 2x=1$ より $2x=\dfrac{\pi}{2}$　よって $x=\dfrac{\pi}{4}$ の 1 個

$0<4k<1$ つまり $0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき　2 個　$\left(k\neq\dfrac{1}{4}\text{ より } x\neq\dfrac{\pi}{4}\right)$

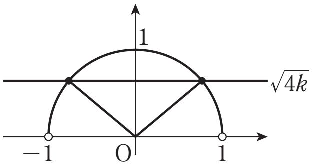
$k>\dfrac{1}{4}$のとき



$k=\dfrac{1}{4}$のとき



$0<k<\dfrac{1}{4}$のとき



したがって，①を満たす x の個数は

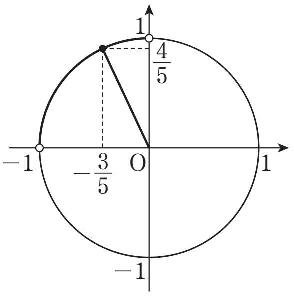
$k>\dfrac{1}{4}$ のとき　１個　　$0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき　３個　　$k=\dfrac{1}{4}$ のとき　１個

(2)　$k=\dfrac{4}{25}$ のとき，②より $\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}-\dfrac{4}{25}\right)\cos 2x=0$

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ つまり $\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ のとき，$\cos 2x\neq 0$

よって，$\dfrac{\sin^2 2x}{4}=\dfrac{4}{25}$

$\sin^2 2x=\dfrac{16}{25}$



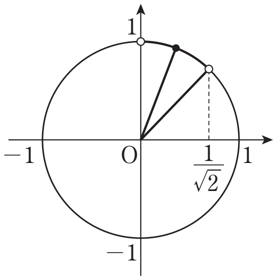
$\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ より $0<\sin 2x<1$　　よって，$\sin 2x=+\dfrac{4}{5}$

このとき，$\cos 2x=-\sqrt{1-\sin^2 2x}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

よって，$2\cos^2 x-1=-\dfrac{3}{5}$　　$\cos^2 x=\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\cos x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$\cos x=+\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$



2　(1)　$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 3x$

$=\sqrt{3}\left(\cos 3x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin 3x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 3x$

$=\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\cos 3x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x\right)+\sqrt{3}\cos 3x$

$=-\dfrac{3}{2}\sin 3x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cos 3x$

$=3\left\{\sin 3x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\cos 3x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$=3\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

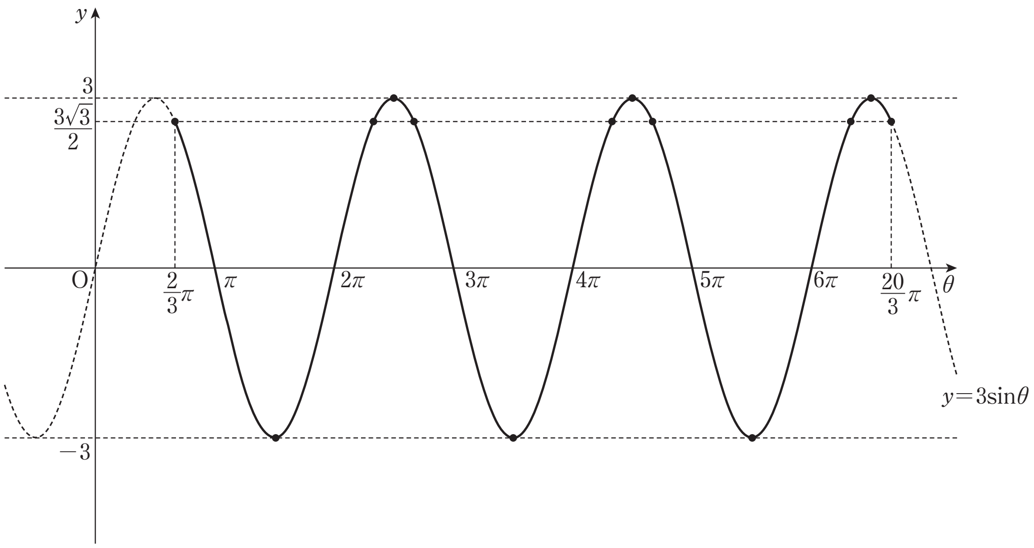
$-1\leqq\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)\leqq 1$ より，$-3\leqq 3\sin\left(3x+\dfrac{2}{3}\pi\right)\leqq 3$

よって，$f(x)$ の最大値は 3 である。

また，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものは $2\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$ である。

(2)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ より $0\leqq 3x\leqq 6\pi$　つまり $\dfrac{2}{3}\pi\leqq 3x+\dfrac{2}{3}\pi\leqq\dfrac{20}{3}\pi$

よって，$3x+\dfrac{2}{3}\pi=\theta$ とおくと，$y=3\sin\theta$ $\left(\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{20}{3}\pi\right)$ のグラフは以下。



$f(x)=t$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ となる x の値の個数は，$y=3\sin\theta$ $\left(\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{20}{3}\pi\right)$ と $y=t$ のグラフの共有点の個数 N に等しい。したがって，

$|t|>3$ のとき，$N=0$

$t=3$ のとき，$N=3$

$t=f(0)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ のとき，$N=7$

$|t|<3$ かつ $t\neq f(0)$ のとき，$N=6$

$t=-3$ のとき，$N=3$

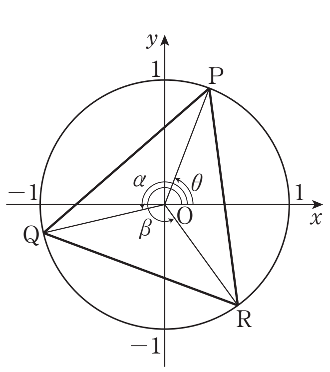
3 (1)　考察１について

△PQR が正三角形である場合，$\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{3}$ より

$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$\alpha=\theta+\dfrac{2}{3}\pi$

同様に，$\angle\mathrm{QOR}=\dfrac{2}{3}\pi$ より，$\beta=\theta+\dfrac{4}{3}\pi$



加法定理により

$$\cos\alpha=\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{2}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\ （⑦）$$

$$\sin\alpha=\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\ （④）$$

同様に

$$\cos\beta=\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{4}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$$

$$\sin\beta=\sin\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{4}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

これらのことから

$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta$$

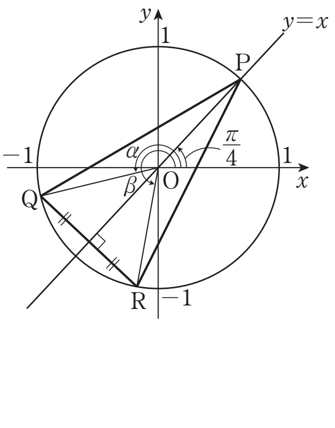
$$=\cos\theta+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)=0$$

$$t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta$$

$$=\sin\theta+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=0$$

より，$s=t=0$ である。

考察2について，$\mathrm{Q}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{R}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ が直線 $y=x$ に関して対称であるから，$\sin\beta=\cos\alpha$，$\cos\beta=\sin\alpha$ が成り立つ。よって



$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha+\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

したがって，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

である。したがって

$$s=t=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$s=t=0$ のとき

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{5}{4}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{2}\pi$

よって，$\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{6}\pi$ より $\alpha=\dfrac{11}{12}\pi$

また，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{5}{4}\pi$ より，$\beta=\dfrac{5}{2}\pi-\alpha=\dfrac{5}{2}\pi-\dfrac{11}{12}\pi=\dfrac{19}{12}\pi$

(2)　$s=t=0$ のとき

$\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=0$ より $\cos\theta=-\cos\alpha-\cos\beta$

$\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=0$ より $\sin\theta=-\sin\alpha-\sin\beta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$(-\sin\alpha-\sin\beta)^2+(-\cos\alpha-\cos\beta)^2=1$

$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=1$

よって，$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}$　……①

同様に，$\cos\beta=-\cos\theta-\cos\alpha$，$\sin\beta=-\sin\theta-\sin\alpha$，$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より

$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$　……②

①より　$\cos(\beta-\alpha)=-\dfrac{1}{2}$　　　②より　$\cos(\alpha-\theta)=-\dfrac{1}{2}$

よって，$\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\theta)=-\dfrac{1}{2}$

ここで，$0\leqq\theta<\alpha<\beta<2\pi$ より，$0<\beta-\alpha<2\pi$，$0<\alpha-\theta<2\pi$

よって，$\beta-\alpha$ および $\alpha-\theta$ は $\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$ のいずれかである。

$\theta+(\beta-\alpha)+(\alpha-\theta)<2\pi$ より，$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

(3)　考察1より，△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ である。

また，考察3より

$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ であるから，$\angle\mathrm{QOR}=\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$\angle\mathrm{QPR}=\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{3}$ であり，$\angle\mathrm{RQP}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，△PQR は正三角形である。

したがって，$s=t=0$ ならば，△PQR は正三角形である。

以上より，△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である（⓪）。

（参考）

考察2の結果について，

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\alpha=\dfrac{11}{12}\pi$ より，$\angle\mathrm{POQ}=\alpha-\theta=\dfrac{11}{12}\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2}{3}\pi$

$\alpha=\dfrac{11}{12}\pi$，$\beta=\dfrac{19}{12}\pi$ より，$\angle\mathrm{QOR}=\beta-\alpha=\dfrac{19}{12}\pi-\dfrac{11}{12}\pi=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$\angle\mathrm{PRQ}=\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\pi}{3}$ であり，PQ＝PR であるから，△PQR は正三角形である。